Prawo powszechnego ciążenia

prawo powszechnego ciążenia ★ $$F_g = G\frac{Mm}{r^2}$$

Dwa ciała przyciągają się siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między ich środkami. Masy punktowe albo ciała o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy, a punkt (drugie ciało) leży na zewnątrz źródła; r mierzymy od środka źródła. Dla innych kształtów to przybliżenie dalekiego pola, a wewnątrz jednorodnej powłoki kulistej pole jest zerowe. Dwie rozciągłe kule nie mogą na siebie zachodzić (r nie mniejsze od sumy promieni). Siła jest wzajemna: każde z dwóch ciał przyciąga drugie siłą F_g o tej samej wartości, więc M i m to po prostu masy obu ciał.

siła ciężkości $$F_g = mg$$

Ciężar (siła ciężkości) F_g = mg to siła grawitacji przy powierzchni Ziemi (g ≈ 9,81 m/s²). Daleko od Ziemi siłę liczymy z prawa powszechnego ciążenia.

natężenie pola grawitacyjnego $$\gamma = \frac{F_g}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Masy punktowe albo ciała o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy, a punkt (drugie ciało) leży na zewnątrz źródła; r mierzymy od środka źródła. Dla innych kształtów to przybliżenie dalekiego pola, a wewnątrz jednorodnej powłoki kulistej pole jest zerowe. Na powierzchni planety γ = g (pomijając jej obrót): 1 N/kg = 1 m/s². Dla Ziemi γ ≈ 9,82 N/kg.

potencjał grawitacyjny $$V = -G\frac{M}{r}$$

Przy zerze w nieskończoności potencjał i energia potencjalna grawitacji są ujemne. Blisko powierzchni Ziemi, przy praktycznie stałym g, niewielka zmiana wysokości daje $\Delta E_p \approx mg\Delta h$. To przybliżenie różnicy nie zmienia przyjętego zera. Zapis $E_p = mgh$ odnosi się do lokalnie wybranego poziomu zerowego energii. Masy punktowe albo ciała o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy, a punkt (drugie ciało) leży na zewnątrz źródła; r mierzymy od środka źródła. Dla innych kształtów to przybliżenie dalekiego pola, a wewnątrz jednorodnej powłoki kulistej pole jest zerowe.

energia potencjalna grawitacji (ogólnie) $$E_{\text{pot}} = -G\frac{Mm}{r}$$

Przy zerze w nieskończoności potencjał i energia potencjalna grawitacji są ujemne. Blisko powierzchni Ziemi, przy praktycznie stałym g, niewielka zmiana wysokości daje $\Delta E_p \approx mg\Delta h$. To przybliżenie różnicy nie zmienia przyjętego zera. Zapis $E_p = mgh$ odnosi się do lokalnie wybranego poziomu zerowego energii. Masy punktowe albo ciała o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy, a punkt (drugie ciało) leży na zewnątrz źródła; r mierzymy od środka źródła. Dla innych kształtów to przybliżenie dalekiego pola, a wewnątrz jednorodnej powłoki kulistej pole jest zerowe. Zmiana energii przy przejściu z odległości r_1 do r_2 od środka ciała: $\Delta E_p = GMm(1/r_1 - 1/r_2)$; gdy $r_2 > r_1$, energia rośnie.

Ruch satelitów

prędkość na orbicie kołowej $$v_{\text{or}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Warunki [1]

pierwsza prędkość kosmiczna ★ $$v_{\text{I}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Prędkość na orbicie kołowej tuż nad powierzchnią planety (R to jej promień), bez oporu atmosfery. Druga prędkość kosmiczna jest $\sqrt{2}$ razy większa: $v_u = \sqrt{2} \cdot v_{\text{I}} \approx 1{,}41 \cdot v_{\text{I}}$. Dla Ziemi $v_{\text{I}} \approx$ 7,9 km/s, a $v_u \approx$ 11,2 km/s.

druga prędkość kosmiczna $$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Idealna prędkość ucieczki z powierzchni sferycznego, nierotującego ciała o promieniu R, dla obiektu bez napędu. Pomijamy opór atmosfery i oddziaływania innych ciał; w nieskończoności prędkość granicznie dąży do zera. Druga prędkość kosmiczna jest $\sqrt{2}$ razy większa od pierwszej: $v_u = \sqrt{2} \cdot v_{\text{I}} \approx 1{,}41 \cdot v_{\text{I}}$. Dla Ziemi $v_{\text{I}} \approx$ 7,9 km/s, a $v_u \approx$ 11,2 km/s.

okres obiegu $$T = \frac{2\pi r}{v_{\text{or}}}$$

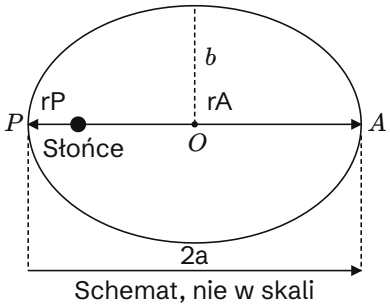
Warunki [1]

II prawo Keplera $$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{const}$$

Promień wodzący planety (odcinek łączący ją ze Słońcem) zakreśla w równych odstępach czasu równe pola, więc planeta porusza się najszybciej najbliżej Słońca. Pole zakreślane w krótkim czasie Δt to ½ · r · v⊥ · Δt, gdzie v⊥ to składowa prędkości prostopadła do promienia wodzącego, więc r · v⊥ = const: w peryhelium i aphelium (v⊥ = v) iloczyn r · v jest taki sam.

III prawo Keplera $$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Orbita kołowa; r to promień orbity. Masa satelity znacznie mniejsza od M.



Schemat, nie w skali

Orbita eliptyczna: peryhelium, aphelium i półosie. Słońce leży w ognisku, O jest środkiem elipsy. P: peryhelium (najbliżej), A: aphelium (najdalej). rP i rA to odległości od Słońca; rP + rA = 2a. a: półoś wielka, b: półoś mała. III prawo Keplera dla elipsy: $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$, gdy masa satelity jest znacznie mniejsza od M. Dla koła a = r. Schemat, nie w skali.

Elementy astronomii

prawo Hubble'a ..... $v = Hd$

Galaktyki oddalają się od nas z prędkością proporcjonalną do odległości. To jeden z dowodów na rozszerzanie się Wszechświata. Liniowe przybliżenie dla przepływu Hubble'a dalekich galaktyk, gdy pomijamy ich prędkości osobliwe. Nie opisuje ruchu każdej pobliskiej galaktyki; przy dużych przesunięciach ku czerwieni trzeba uwzględnić model kosmologiczny.

[1] Wzory na prędkość na orbicie i okres obiegu dotyczą orbity kołowej i satelity o masie dużo mniejszej od masy planety; pomijamy inne ciała. r to odległość od środka planety (promień planety plus wysokość nad powierzchnią).

Symbole i jednostki

symbol	znaczenie	jednostka
a_1	promień orbity kołowej albo półoś wielka orbity pierwszego ciała	m
a_2	promień orbity kołowej albo półoś wielka orbity drugiego ciała	m
d	odległość galaktyki od Ziemi	m
E_{pot}	energia potencjalna grawitacji	J
F_g	siła grawitacji	N
g	przyspieszenie ziemskie ≈ 9,81	$\mathrm{m/s^2}$
G	stała grawitacji ≈ 6,67 · 10⁻¹¹	$\mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}$
H	obecna wartość stałej Hubble'a ≈ 2,3 · 10⁻¹⁸	$1/\mathrm{s}$
m	masa ciała	kg
M	masa ciała przyciągającego (np. planety)	kg
r	odległość od środka ciała, które wytwarza pole (w prawie ciążenia: między środkami obu ciał)	m
R	promień planety	m

symbol	znaczenie	jednostka
ΔS	pole zakreślone przez promień wodzący planety	$\mathrm{m^2}$
Δt	czas, w którym promień wodzący zakreśla pole	s
T	okres obiegu	s
T_1	okres obiegu pierwszego ciała	s
T_2	okres obiegu drugiego ciała	s
v	prędkość na orbicie	$\mathrm{m/s}$
v_{I}	pierwsza prędkość kosmiczna	$\mathrm{m/s}$
v_{or}	prędkość na orbicie kołowej	$\mathrm{m/s}$
v_u	druga prędkość kosmiczna	$\mathrm{m/s}$
V	potencjał grawitacyjny	$\mathrm{J/kg}$
γ	natężenie pola grawitacyjnego	$\mathrm{N/kg}$