Drgania tłumione

drgania tłumione $x = A_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t)$

Słabe tłumienie i opór proporcjonalny do prędkości: współczynnik tłumienia β jest mniejszy od częstości kołowej drgań bez tłumienia ω_0, a wtedy $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Zapis bez fazy początkowej zakłada $x(0) = A_0$ oraz $v(0) = -\beta A_0$; nie opisuje dowolnych warunków początkowych.

częstość drgań tłumionych $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Słabe tłumienie: $0 \le \beta < \omega_0$; przy $\beta \ge \omega_0$ układ wraca do równowagi bez drgań. Współczynnik tłumienia opisuje zanik amplitudy: $A(t) = A_0\,\exp(-\beta t)$; dla siły oporu $-bv$ jest $\beta = b/(2m)$.

Drgania harmoniczne

okres z częstotliwości $T = \dfrac{1}{f}$

Okres T to czas jednego pełnego drgania lub obiegu; częstotliwość f > 0 to liczba drgań na sekundę.

siła sprężystości $F_s = -kx$

Prawo Hooke'a obowiązuje, dopóki sprężyna po odciążeniu wraca do pierwotnej długości. x mierzymy od długości naturalnej sprężyny; przy pionowym zawieszeniu jest to inny punkt niż położenie równowagi obciążonej sprężyny.

częstość kołowa ciężarka na sprężynie $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Idealna sprężyna (masa pomijalna, brak oporów), siła zgodna z prawem Hooke'a.

okres drgań ciężarka na sprężynie $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Idealna sprężyna (masa pomijalna, brak oporów), siła zgodna z prawem Hooke'a. Okres nie zależy od przyspieszenia ziemskiego ani od amplitudy: jest taki sam dla sprężyny poziomej i pionowej.

wychylenie w ruchu harmonicznym

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Dla t = 0 wychylenie wynosi A sin φ: $\varphi = 0$ oznacza start z położenia równowagi, a $\varphi = 90°$ ($\pi/2$ rad) start z największego wychylenia.

prędkość w ruchu harmonicznym

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Wzór zakłada wychylenie x = A sin(ωt + φ), z tą samą fazą początkową φ.

prędkość maksymalna $v_{\max} = A\omega$

przyspieszenie maksymalne $a_{\max} = A\omega^2$

przyspieszenie w ruchu harmonicznym $a = -\omega^2 x$

$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Druga postać zakłada wychylenie x = A sin(ωt + φ), z tą samą fazą początkową φ.

siła harmoniczna $F_h = -m\omega^2 x$

energia drgań $E = \dfrac{kA^2}{2}$ $E = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2$

Drgania bez strat; A to amplituda mierzona od położenia równowagi. Obie postacie są równe, bo dla ciężarka na sprężynie $k = m\omega^2$.

Wahadło matematyczne

okres drgań wahadła matematycznego ★ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Wzór na okres obowiązuje dla małych wychyleń: przy wychyleniu 10° daje okres zaniżony o ok. 0,2%, przy 20° o ok. 0,8%. Nić traktujemy jako nieważką i nierozciągliwą, a ciężarek jak punkt. Okres nie zależy od masy ciężarka.

Fale

prędkość fali ★ $v = \lambda f = \dfrac{\lambda}{T}$

prędkość fali w strunie $v = \sqrt{\dfrac{Fl}{m}}$

Jednorodna, napięta struna (m/l to masa na jednostkę długości) i małe wychylenia.

moc źródła fali ····· $P = \frac{E}{t}$

To moc średnia: E to energia wysłana w czasie t. Przy stałej mocy jest równa mocy chwilowej.

natężenie fali ····· $I = \frac{P}{S} \quad I = \frac{E}{S\Delta t}$

P to moc przechodząca przez powierzchnię S ustawioną prostopadle do kierunku fali, rozłożona po niej równomiernie. Natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy: dwa razy większa amplituda to cztery razy większe natężenie. Druga postać (z karty CKE): E to energia przeniesiona przez powierzchnię S w czasie Δt, więc E/Δt = P.

natężenie fali kulistej ····· $I = \frac{P}{4\pi r^2}$

Punktowe źródło wysyła falę równomiernie we wszystkie strony, a ośrodek jej nie pochłania; wtedy natężenie maleje z kwadratem odległości: dwa razy dalej jest cztery razy słabiej. Na karcie wzorów CKE jest tylko zależność I ~ 1/r²: dwa razy dalej natężenie jest cztery razy mniejsze. Mianownik 4πr² to pole sfery o promieniu r, na którą rozkłada się moc źródła.

fala stojąca w strunie ····· $\lambda = \frac{2l}{n}$

Struna zamocowana na obu końcach: końce są węzłami fali stojącej.

zjawisko Dopplera ····· $f_{\text{ob}} = f_{\text{źr}} \frac{v_d + v_{\text{ob}}}{v_d - v_{\text{źr}}}$

Gdy źródło i obserwator zbliżają się do siebie, odbierana częstotliwość rośnie, a gdy się oddalają, maleje. Wzór dotyczy ruchu wzdłuż prostej łączącej źródło i obserwatora; powietrze jest nieruchome. Prędkość dodatnia oznacza ruch ku drugiemu, ujemna ruch od niego; ten, kto stoi, ma prędkość 0. Na przykład dla nadjeżdżającej karetki i stojącego przechodnia $v_{\text{źr}} > 0$ i $v_{\text{ob}} = 0$. Źródło zbliżające się i obserwator oddalający się muszą być wolniejsze od dźwięku.

Znaki prędkości w zjawisku Dopplera

sytuacja	prędkość we wzorze	odbierany dźwięk
źródło się zbliża	prędkość źródła dodatnia	wyższy
źródło się oddala	prędkość źródła ujemna	niższy
obserwator się zbliża	prędkość obserwatora dodatnia	wyższy
obserwator się oddala	prędkość obserwatora ujemna	niższy

Znaki prędkości w zjawisku Dopplera. Znak prędkości mówi, czy dany obiekt zbliża się do drugiego, czy od niego oddala. Ten, kto stoi, ma prędkość 0.

interferencja fal ····· $\Delta x = n\lambda \quad \Delta x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Fale z dwóch zgodnych źródeł (o tej samej częstotliwości i fazie) wzmacniają się tam, gdzie różnica dróg jest całkowitą wielokrotnością długości fali, a osłabiają tam, gdzie jest nieparzystą liczbą połówek fali. Całkowicie się wygaszają tylko wtedy, gdy w tym miejscu mają równe amplitudy. Pierwszy wzór to wzmocnienie: różnica dróg Δx = |r₁ − r₂| jest całkowitą wielokrotnością długości fali. Drugi to wygaszenie: Δx to nieparzysta liczba połówek fali. n = 0, 1, 2, … Kalkulator liczy z liczby połówek fali k = 2Δx/λ: k parzyste (0, 2, 4, …) to wzmocnienie, k nieparzyste (1, 3, 5, …) to wygaszenie. Postacie z karty CKE zapisują te same warunki przez różnicę faz: różnica dróg Δx daje różnicę faz 2πΔx/λ, więc wzmocnienie to różnica faz 2πn, a wygaszenie 2π(n + 1/2).

Drgania wymuszone

amplituda drgań wymuszonych

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$$

Masa na sprężynie z oporem proporcjonalnym do prędkości, poruszana siłą $F_0\cos(\omega t)$. A to amplituda drgań ustalonych, czyli po wygaśnięciu drgań własnych. Bez tłumienia ($\beta = 0$) wzór działa tylko dla $\omega \neq \omega_0$: w rezonansie amplituda rosłaby bez końca, a poza nim drgania własne nie wygasają, więc A opisuje tylko część ruchu wymuszoną siłą. Dla ω bliskiego zera $A \approx F_0/(m\omega_0^2)$. Przy słabym tłumieniu amplituda jest największa blisko ω_0 i wynosi w przybliżeniu $F_0/(2m\beta\omega_0)$.

Symbole i jednostki

symbol	znaczenie	jednostka
a	przyspieszenie	$\mathrm{m/s^2}$
$a_{\max}$	przyspieszenie maksymalne	$\mathrm{m/s^2}$
A	amplituda	m
A_0	amplituda początkowa	m
E	energia	J
f	częstotliwość	Hz
f_{ob}	częstotliwość odbierana przez obserwatora	Hz
$f_{\mathrm{źr}}$	częstotliwość wysyłana przez źródło	Hz
F	siła	N
F_0	amplituda siły	N

symbol	znaczenie	jednostka
F_h	siła harmoniczna (wypadkowa w ruchu harmonicznym)	N
F_s	siła sprężystości	N
g	przyspieszenie ziemskie ≈ 9,81	$\mathrm{m/s^2}$
I	natężenie fali	$\mathrm{W/m^2}$
k	współczynnik sprężystości	$\mathrm{N/m}$
l	długość	m
m	masa	kg
n	liczba połówek fali na długości struny (1, 2, 3, ...)	$-$
P	moc	W
r	odległość od punktowego źródła	m

symbol	znaczenie	jednostka
S	powierzchnia	$\mathrm{m^2}$
t	czas	s
Δt	czas, w którym fala przenosi energię E przez powierzchnię S	s
T	okres	s
v	prędkość fali	$\mathrm{m/s}$
v_d	prędkość dźwięku w ośrodku, w powietrzu o temperaturze ok. 15 °C ≈ 340	$\mathrm{m/s}$
$v_{\max}$	prędkość maksymalna	$\mathrm{m/s}$
v_{ob}	prędkość obserwatora: dodatnia, gdy zbliża się do źródła, ujemna, gdy się oddala	$\mathrm{m/s}$
$v_{\mathrm{źr}}$	prędkość źródła: dodatnia, gdy zbliża się do obserwatora, ujemna, gdy się oddala	$\mathrm{m/s}$
x	wychylenie	m

symbol	znaczenie	jednostka
Δx	wartość bezwzględna różnicy dróg fal z dwóch źródeł do danego punktu	m
β	współczynnik tłumienia	$\mathrm{1/s}$
λ	długość fali	m
φ_0	faza początkowa	rad
φ_1	faza fali z pierwszego źródła w danym punkcie	rad
φ_2	faza fali z drugiego źródła w danym punkcie	rad
ω	częstość kołowa	$\mathrm{rad/s}$
ω_0	częstość kołowa drgań własnych (bez tłumienia)	$\mathrm{rad/s}$